المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

ثانية بكلوريا علوم تجريبية

نماذج للفروض المحروسة

فروض محروسة

سلاسل التمارين



الدورة الأولى

موسم 2020 / 2021



ثانية بكلوريا علوم فزيائية

التحضير للفرض المحروس

رقم 2

الدورة الأولى

موسم 2020 – 2021

ملاحظة هامة : نظرا لطبيعة التعليم عن بعد وعدم كفاية الوقت لتقديم الدرس وانجاز التمارين في القسم فان فروض هذه السنة تعد حالة استثنائية من حيث سهولتها والاقتصار على ساعة أوساعة ونصف بدل ساعتين





واجب منزلي رقم 2 دورة 1:

ثانوية الليمون

2020
2021

مستوى: ثانية باك علوم ← فوج: 2k+1

تمرين 1:

1° أحسب النهايات

① $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$

② $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2+1}$

2° نعتبر الدالة f بحيث:

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x} + 1 ; (x \geq 0) \\ f(x) = \sqrt[3]{1+x^2} ; (x < 0) \end{cases}$$

2-1° أدرس قابلية اشتقاق f في $a=0$ على اليمين وعلى اليسار.

2-2° إعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها.

تمرين 2:

لتكن الدالة g المعرفة كما يلي:

$$\forall x \in [\frac{1}{2} ; +\infty[, \quad g(x) = x + \sqrt{2x-1}$$

1° برهن أن g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J مع تحديد J ، ثم احسب: $\lim_{x \to +\infty} g^{-1}(x)$

2° ضع جدول تغيرات g^{-1}.

3° بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في 1 ثم أحسب $(g^{-1})'(1)$

4° حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x - g^{-1}(x) = 0$

5° تحقق أن: $(\forall x \in J) ; \quad g^{-1}(x) = 1 + x - \sqrt{2x}$

6° أحسب: $g^{-1}([\frac{1}{2} ; 1])$

① *** الحل ***

تمرين 1) 1° حساب ① $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$: مباشرة نجد : "$\frac{0}{0}$" ش.ع.م.

ولدينا :

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1} = \frac{\sqrt[3]{x}^3-1^3}{(x^2-1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt{x}+1^2\right)}$$

$$= \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

اذن :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

حساب ② : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2+1}$: مباشرة نجد : "$\infty-\infty$" ش.ع.م.

ونكتب :

$$\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2+1} = x^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

بما أن : $\frac{1}{2}-\frac{2}{3} = \frac{-1}{6}$ فإن : $\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

اذن :

$$x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}}\left(1 - x^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$ و $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{6}} = +\infty$ اذن : $\lim_{x\to+\infty}\left(1-x^{\frac{1}{6}}\times\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}\right) = -\infty$

اذن :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2+1}\right) = +\infty \times (-\infty) = \boxed{-\infty}$$

2

2° (1 ق.ش على اليمين في $a=0$: لدينا : $f(0)=1$ و :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{(x+\sqrt{x}+1)-1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x+\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$$

إذن f لا تقبل الاشتقاق في 0 على اليمين.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt[3]{1+x^2}^{\,2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2}{x\left(\sqrt[3]{1+x^2}^{\,2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}^{\,2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}$$

$$= \frac{0}{3} = \boxed{0}$$

إذن f تقبل الاشتقاق في 0 على اليسار و : $f'_g(0)=0$

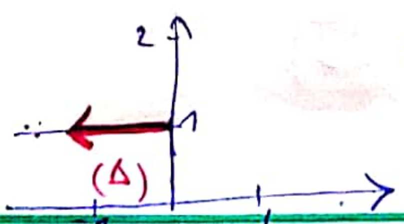
2° - 2) تأويل هندسي :

(C_f) يقبل نصف مماس في A على اليسار معادلة :

$(\Delta)\quad y = 0(x-0)+f(0)$ و $x \leq 0$

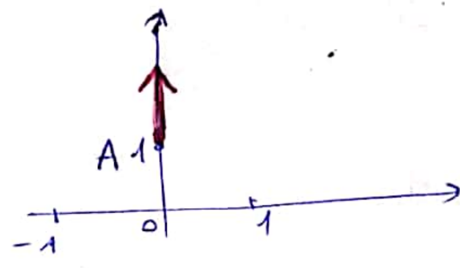
أي : $(\Delta): y = 1$ و $x \leq 0$

حيث : $A(0;f(0))$ أي $A(0,1)$



3

(C_f) يقبل كذلك نصف مماس (Δ) موجه نحو الأراتيب الموجبة (Δ) يوازي $((Oy))$ في النقطة: $A(0;1)$.



تمرين 2

$\forall x \in [\frac{1}{2};+\infty[\ ;\quad g(x) = x + \sqrt{2x-1}$

1) $x \longmapsto 2x-1$ متصلة وموجبة على $[\frac{1}{2};+\infty[$

اذن g دالة متصلة على $[\frac{1}{2};+\infty[$.

الدالة g ق.ش على $]\frac{1}{2};+\infty[$ ولدينا،

$$\forall x \in [\frac{1}{2};+\infty[\ ;\quad g'(x) = 1 + \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}}$$

$$\forall x \in [\frac{1}{2};+\infty[\quad g'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$$

اذن g تزايدية قطعا على المجال $[\frac{1}{2};+\infty[$.

وبالتالي g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال: $J = g([\frac{1}{2};+\infty[)$ ؛ ولدينا:

$$J = [g(\tfrac{1}{2}), \lim_{x\to+\infty} g(x)[= [\tfrac{1}{2};+\infty[$$

حساب: $\lim_{x\to+\infty} g^{-1}(x)$ لدينا: g^{-1} متصلة، معرفة من $J = [\frac{1}{2};+\infty[$ نحو: $[\frac{1}{2};+\infty[$

4

إذن : $g^{-1}([\frac{1}{2};+\infty[) = [\frac{1}{2};+\infty[$

أي أن : $[g^{-1}(\frac{1}{2}); \lim_{x\to+\infty} g^{-1}(x)[= [\frac{1}{2};+\infty[$

ومنه نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$

2° جدول تغيرات g^{-1} :

x	$1/2$ $\quad\quad$ $+\infty$
g^{-1}	$1/2$ $\nearrow$ $+\infty$

g ↗ قطعا على $[\frac{1}{2};+\infty[$

إذن g^{-1} ↗ قطعا على $[\frac{1}{2};+\infty[$

3° ملاحظة : g^{-1} قابلة للاشتقاق في 1 معناه أن الكتابة :

$$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))}$$

لها معنى

نبين أن : g^{-1} ق.ش في 1.

نحسب أولا $g^{-1}(1)$: نضع ، $\alpha = g^{-1}(1)$ إذن :

$\alpha \geq \frac{1}{2}$ و $g(\alpha) = 1$

$\alpha + \sqrt{2\alpha - 1} = 1 \Rightarrow \sqrt{2\alpha-1} = 1-\alpha$ و $1-\alpha \geq 0$

$\Rightarrow 2\alpha - 1 = 1 - 2\alpha + \alpha^2$ و $1-\alpha\geq 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0$ و $1 \geq \alpha$

$\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$ إذن : $\alpha = \frac{4+2\sqrt{2}}{2}$ أو $\alpha = \frac{4-2\sqrt{2}}{2}$

أي أن :

$\alpha = 2+\sqrt{2}$ أو $\alpha = 2-\sqrt{2}$

نعلم أن $\alpha \leq 1$ إذن : $\alpha \neq 2+\sqrt{2}$

5

ومنه: $\alpha = 2-\sqrt{2}$

اذن: $g^{-1}(1) = 2-\sqrt{2}$

وبما أن g ق.ش على المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$ فإنها ق.ش

في $g^{-1}(1)$ كما أن: g' لا تنعدم

(لأن: $g'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$)

اذن: g^{-1} تقبل الاشتقاق في $1=g(2-\sqrt{2})$

حساب: $(g^{-1})'(1)$:

$$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = \frac{1}{g'(2-\sqrt{2})}$$

ولدينا:

$$g'(2-\sqrt{2}) = 1+\frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})-1}} = 1+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}$$

$$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

وإذن:

$$(g^{-1})'(1) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4°) نحل في IR المعادلة: $x-g^{-1}(x)=0$

$$x-g^{-1}(x)=0 \iff x=g^{-1}(x) \text{ و } x\geq\frac{1}{2}$$

$$\iff g(x)=x \text{ و } x\geq\frac{1}{2}$$

$$\iff x+\sqrt{2x-1}=x \text{ و } x\geq\frac{1}{2}$$

$$\iff \sqrt{2x-1}=0 \text{ و } x\geq\frac{1}{2}$$

6

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad و \quad x \geq \frac{1}{2}$

إذن :
$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

5°) ليكن x و y من المجال $[\frac{1}{2}, +\infty[$

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{2y-1} = x$

$\Leftrightarrow \quad 2y + 2\sqrt{2y-1} = 2x$

$\Leftrightarrow \quad 2y - 1 + 2\sqrt{2y-1} + 1 = 2x$

$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{2y-1} + 1\right)^2 = 2x$

$\Leftrightarrow \quad \left|\sqrt{2y-1} + 1\right| = \sqrt{2x}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2y-1} + 1 = \sqrt{2x}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2y-1} = -1 + \sqrt{2x}$

$\Leftrightarrow \quad 2y - 1 = 1 + 2x - 2\sqrt{2x}$ (مربع الطرفين)

$\Leftrightarrow \quad 2y = 2 + 2x - 2\sqrt{2x}$

$$y = 1 + x - \sqrt{2x}$$

إذن : $\forall x \in [\frac{1}{2}, +\infty[\quad g^{-1}(x) = 1 + x - \sqrt{2x}$

6°) نعلم أن صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

إذن : $g^{-1}([\frac{1}{2} ; 1])$ قطعة لأن g^{-1} متصلة

7

باستخدام تعبير g^{-1} نجد: $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

(نلاحظ أن: $g^{-1}([\frac{1}{2}, +\infty[) = [\frac{1}{2}, +\infty[$ إذن $\left(g^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\right)$

ونعلم أن: $g^{-1}(1) = 2-\sqrt{2}$

إذن:

$$g^{-1}\left(\left[\frac{1}{2} ; 1\right]\right) = \left[\frac{1}{2} ; 2-\sqrt{2}\right]$$

—— * * *fin* * * ——

واجب منزلي رقم 2 دورة 1 — 2020/2021

ثانوية الليمون / مستوى PC(2+3)

[فوج : 2k]

I) حساب النهايات:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[6]{x^2-2x}}{\sqrt[3]{x+1}}$

II) لتكن الدالة f بحيث:

$$f(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$$

1-أ) حدد D_f ثم ادرس اتصال f على D_f.

1-ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس ق.ش f في 0 ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

3) تحقق أن:

$$(\forall x>-1);\ f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

4) ضع جدول تغيرات f.

5) بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو المجال $I=D_f$.

6) أحسب $f(1)$ ثم بين أن f^{-1} ق.ش في $f(1)$ وحدد $(f^{-1})'(f(1))$.

7) أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

الحل:

I) حساب النهاية (a): مباشرة نجد: $\frac{0}{0}$ وهو ش.غ.م ولدينا:

$$\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{(4x-8)(\sqrt{x+7}+3)}{(x+7-9)(\sqrt[3]{4x}^2+2\sqrt[3]{4x}+4)}$$

$$=\frac{4(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt[3]{4x}^2+2\sqrt[3]{4x}+4)}$$

اذن:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{4(\sqrt{x+7}+3)}{\sqrt[3]{4x}^2+2\sqrt[3]{4x}+4}$$

$$=\frac{4\times 9}{4+4+4}=\frac{9}{3}=\boxed{3}$$

1) حساب النهاية (b): مباشرة نجد $\frac{\infty}{\infty}$ (ش.غ.م)

ولدينا:

$$\frac{\sqrt[6]{x^2-2x}}{\sqrt[3]{x+1}}=\frac{\sqrt[6]{x^2-2x}}{\sqrt[6]{(x+1)^2}}=\sqrt[6]{\frac{x^2-2x}{(x+1)^2}}$$

بما أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{(x+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

فإن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{x^2-2x}}{\sqrt[3]{x+1}}=1$$

II) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$

1-أ)

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} ;\ x+1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R} ;\ x\geq -1\}=[-1,+\infty[$$

لدينا: $x\mapsto x+1$ متصلة وموجبة على D_f.

اذن: f متصلة على D_f.

1-ب) بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+1}-1=\boxed{+\infty}$

2) ق.ش f في 0:

لدينا: $f(0)=0$ و:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$$

$$=\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}$$

اذن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{3}$$

وبالتالي $\boxed{f \text{ ق.ش في } 0}$.

تأويل هندسي: (C_f) يقبل مماسا في النقطة ذات الأفصول 0

3) لكل x من $]-1,+\infty[$ لدينا:

$x+1>0$ اذن f قاش على $]-1,+\infty[$

ولدينا: $(\forall x>-1) ; \; f'(x) = \left(\sqrt[3]{x+1} - 1\right)'$

$$= \frac{(x+1)'}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} > 0$$

4) بما أن: $(\forall x>-1), \; f'(x)>0$ فإن f تزايدية قطعا على D_f اذن:

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-1 \nearrow +\infty$

(نلاحظ أن -1 هو قيمة دنيا للدالة f)

5) بما أن f متصلة على D_f (سؤال 1-أ)) وتزايدية قطعا على D_f اذن تقبل دالة عكسية f^{-1} على المجال $J=f(D_f)$ نحو D_f.

6) لدينا: $f(1) = \sqrt[3]{2} - 1$

نطبق الخاصية:

$$(f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)}$$

بما أن f' ق.ش في 1

و $f'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \neq 0$

فإن: f^{-1} ق.ش في $f(1)$ ولدينا:

$$(f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}} = \boxed{3\sqrt[3]{4}}$$

7) نحدد أولا J:

$$J = f([-1;+\infty[) = [f(-1); \lim_{+\infty} f[= [-1;+\infty[$$

لكل x من J و y من D_f لدينا:

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1} - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1} = x+1$$

$$\Leftrightarrow y+1 = (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow y = x^3+3x^2+3x+1-1$$

اذن: $\boxed{(\forall x \in J); \; f^{-1}(x) = x^3+3x^2+3x}$



سلسلة تمارين في الرياضيات / موسم : 2020 - 2021

مستوى ثانية باك علوم دورة I.

خوج : (2k + 1)

f دالة عددية معرفة بالصيغة :

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$$

1 - أ) أوجد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

1 - ب) أحسب نهايات f عند محدات D_f .

2 - أ) أثبت أن : $(\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[)$:

$$f'(x) = \frac{-1}{3(x-1)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}}$$

2 - ب) أدرس قابلية اشتقاق f في الصفر على اليسار.

2 - ج) استنتج جدول تغيرات f .

3 - لتكن g قصور الدالة f على المجال $\mathbb{R}^-$.

3 - أ) تحقق أن g تقبل دالة عكسية معرفة على $[0, 1[$ نحو $\mathbb{R}^-$.

3 - ب) أحسب $(g^{-1})\left(\frac{1}{2}\right)$ ثم : $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$

3 - ج) أحسب التعبير $g^{-1}(x)$.

..* fin *..

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$$

①

1-أ) ليكن x من $\mathbb{R}$.

$$x \in D_f \iff \left(\frac{x}{x-1} \geq 0 \text{ و } x-1 \neq 0 \right)$$

لدينا جدول الاشارة:

x		0		1	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x}{x-1}$	$+$	0	$-$	‖	$+$
	≥ 0				≥ 0

اذن:

$$x \in D_f \iff x \in]-\infty; 0] \cup]1, +\infty[$$

ومنه:

$$\boxed{D_f =]-\infty; 0] \cup]1 +\infty[}$$

1-ب) لدينا:

$$D_f =]-\infty \,;\, 0] \cup]1 \,;\, +\infty[$$

4 محدات

محد مغلق

3 محدات مفتوحة.

عند المحدات المغلقة النهاية تساوي الصورة (لأن الدالة تكون معرفة)

اذن:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = f(0) = \sqrt[3]{\frac{0}{0-1}} = \sqrt[3]{0} = \boxed{0}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} = \text{"} \frac{1}{0^+} \text{"} = \boxed{+\infty}$$

(لأن: $x > 1$ واذن $x-1 > 0$)

ولدينا: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = \boxed{1}$ اذن: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$= \boxed{1}$$

2-أ) ملاحظة هامة: إذا كانت: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

فإن مجموعة تعريف f هي: $\{x \in \mathbb{R} \,;\, g(x) \geq 0\}$

لكل x من $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ لدينا: $\frac{x}{x-1}>0$

اذن f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ و:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\right)'=\left(\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}-1}\times\left(\frac{x}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{-2}{3}}\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{3(x-1)^2\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

اذن:

$$\boxed{f'(x)=\frac{-1}{3(x-1)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}}}$$

طريقة أخرى:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-1}}}=\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}}=\frac{-1}{3(x-1)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}}$$

2-ب) قابلية الاشتقاق في الصفر على اليسار:

لدينا: $f(0)=0$ و:

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$$

بما أن: $x<0$ فإن: $-x>0$ اذن: $-x=\sqrt[3]{(-x)^3}$

ومنه: $x=-\sqrt[3]{(-x)^3}$ بالتالي:

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{-\sqrt[3]{(-x)^3}}\times\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\<}}-\sqrt[3]{\frac{1}{(-x)^3}\times\frac{x}{x-1}}=\lim_{\substack{x\to0\\<}}-\sqrt[3]{\frac{x}{-x^3(x-1)}}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 0} -\sqrt[3]{\frac{1}{-x^2(x-1)}}$$

لدينا: $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{-x^2(x-1)} = \text{"}\frac{1}{-0^2 \times (-1)}\text{"}$

$= \text{"}\frac{1}{0^2 \times 1}\text{"} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = \boxed{+\infty}$

إذا: $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} -\sqrt[3]{\frac{1}{-x^2(x-1)}} = \boxed{-\infty}$

ومنه: $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \boxed{-\infty}$

إذن g لا تقبل الاشتقاق في الصفر على اليسار.

ملاحظة: التأويل الهندسي لهذه النتيجة:

$(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب في النقطة $A(0; f(0))$ أي في النقطة O.

نصف المماس موجّه نحو الأعلى:



لأن: $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

$(-) \times (-) = (+) \uparrow$

2-ج) جدول التغيرات

نلاحظ أن: مقام $f'(x)$ موجب

والبسط: -1

إذن: $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة قطعا على D_f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$(-\infty)$ ‖	//////	‖	$-$	
f	1	↘	0 ‖	//////	‖ $+\infty$	↘	1

4 (3-أ

ملاحظة : g قصور f على $\mathbb{R}^-$

معناه : $g(x) = f(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R}^-)$.

الدالة : $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ متصلة على مجموعة تعريفها

وبالخصوص على $\mathbb{R}^-$. وبما أنها موجبة فإن: $g : x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$

متصلة على $\mathbb{R}^-$.

وبما أن f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^-$ فإن g تناقصية قطعا

على $\mathbb{R}^-$, (لأن $g = f$).

إذن g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال $g(\mathbb{R}^-)$

نحو المجال : $\mathbb{R}^-$. لدينا:

$$g(\mathbb{R}^-) = f(]-\infty; 0]) = [f(0) ; \lim_{x \to -\infty} f(x)[$$

$$= [0; 1[$$

(3-ب حساب $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

نضع : $\alpha = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ لدينا،

$$\alpha = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow g(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha} = 8 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\alpha} = 8$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha} = 7 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{7} \Leftrightarrow \boxed{g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{7}}$$

حساب : $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

نعلم أن : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$ إذن : $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$

5

لدينا : $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{7}$ نعوض في تعبير المشتقة :

$$g'\left(g^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)=\frac{-1}{3\left(-\frac{1}{7}-1\right)^2\sqrt[3]{\left(\frac{-\frac{1}{7}}{-\frac{1}{7}-1}\right)^2}}$$

$$=\frac{-1}{3\times\frac{64}{49}\sqrt[3]{\left(\frac{-1}{-8}\right)^2}}=\frac{-1}{3\times\frac{64}{49}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2}}=\frac{-1}{3\times\frac{64}{49}\times\frac{1}{4}}$$

$$=-\frac{1}{3}\times\frac{49}{64}\times 4=-\frac{49}{48}$$

اذن :

$$\boxed{(g^{-1})'\left(\tfrac{1}{2}\right)=-\frac{48}{49}}$$

---

3 - ج)

ليكن x من $[0;1[$ و y من $\mathbb{R}^-$ لدينا ،

$$g^{-1}(x)=y\iff g(y)=x\iff\sqrt[3]{\frac{y}{y-1}}=x$$

$$\iff\frac{y}{y-1}=x^3\iff y=x^3y-x^3$$

$$\iff y(1-x^3)=-x^3$$

بما أن : $0\leqslant x<1$ فإن : $x^3<1$ اذن : $1-x^3\neq 0$

وبالتالي :

$$y=\frac{-x^3}{1-x^3}=\frac{x^3}{x^3-1}$$

ومنه فإن :

$$\boxed{\forall x\in[0;1[\;;\;g^{-1}(x)=\frac{x^3}{x^3-1}}$$

— * * fin * * —



ثانوية الليمون
مستوى: ثانية باك علوم

فرض محروس في الرياضيات رقم 2 [نموذج أ]
دورة I - موسم 2020 - 2021

مدة الإنجاز: ساعة ونصف.

التمرين الأول:

1° أحسب النهايتين: $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{6}{5}}$ و $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{9x}-3}{x^2-9}$

2° بسط التعبير: $A = \frac{\left(\sqrt[6]{4}\right)^3 \sqrt[3]{\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{32}\sqrt{\sqrt{2}}}$

3° قارن العددين: $a = \sqrt[3]{7}$ و $b = \sqrt{5}$ (بدون آلة حاسبة)

4° نعتبر الدالة العدد h بحيث: $h(x) = 8x^{15} - 5x^9 + 2x^3 - 1$

أوجد الدالة الأصلية H للدالة h التي تحقق $H(-1) = \frac{3}{2}$

التمرين الثاني:

لتكن الدالة f بحيث: $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2+1}$

1° / حدد D_f ثم تحقق أن f دالة زوجية وأحسب $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$ ،

2° / بين أن: $(\forall x \in D_f)\;:\; f(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)^2 - 2$

3° / لتكن g قصور الدالة f على المجال $I = [0;+\infty[$.

3° - أ) بين أن: $g'(x) = 2x \times \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+1}}$ لكل x من I.

3° - ب) إستنتج رتابة g على I .

4° / بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

5° / بين أن g^{-1} تقبل الاشتقاق في $x_0 = 1 - 2\sqrt{2}$ (لاحظ أن: $g(1) = 1 - 2\sqrt{2}$)

6° / أحسب العدد: $(g^{-1})'(1 - 2\sqrt{2})$

7° / بين أن 2- هو قيمة دنيا للدالة f على D_f .

8° / حدد الفروع اللانهائية للدالة f .

—** fin **—

ثانوية اليرموك

2021 - 2020
2 Bac Sc

تصحيح نموذج رقم 1 للواجب رقم 2

الدورة I.

التمرين الأول

1° حساب النهاية :

$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{6}{5}}$ مباشرة نجد F.I "$\infty-\infty$"

ولدينا: $\frac{7}{3}-\frac{6}{5} = \frac{35-18}{15} = \frac{17}{15}$

اذن: $\frac{7}{3} = \frac{6}{5} + \frac{17}{15}$ وبالتالي:

$$x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{6}{5}} = x^{\frac{6}{5}+\frac{17}{15}} - x^{\frac{6}{5}} = x^{\frac{6}{5}}\left(x^{\frac{17}{15}}-1\right)$$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{6}{5}} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{5}}\left(x^{\frac{17}{15}}-1\right) = \boxed{+\infty}$

حساب: $\lim_{x\to3} \frac{\sqrt[3]{9x}-3}{x^2-9}$: مباشرة نجد $\frac{0}{0}$ (F.I).

لدينا:

$$\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{x^2-9} = \frac{\sqrt[3]{9x}^3 - 3^3}{(x^2-9)\left(\sqrt[3]{9x}^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 3^2\right)}$$

$$= \frac{9(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt[3]{9x}^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9\right)}$$

اذن:

$$\lim_{x\to3} \frac{\sqrt[3]{9x}-3}{x^2-9} = \lim_{x\to3} \frac{9}{(x+3)\left(\sqrt[3]{9x}^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9\right)}$$

$$= \frac{9}{6\times\left(\sqrt[3]{27}^2 + 3\sqrt[3]{27} + 9\right)} = \frac{9}{6\times(3\times9)} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

2° نبسط التعبير A:

$$A = \frac{\left(\sqrt[3\times2]{2^2}\right)^3 \sqrt[3]{\sqrt[2]{2^3}}}{\sqrt[3]{2^5}\sqrt[2]{\sqrt[2]{2}}} = \frac{2\times\sqrt[2]{2}}{2^{\frac{5}{3}}\, 2^{\frac{1}{4}}}$$

$$= 2^{1+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}-\frac{1}{4}} = 2^{1+\frac{6-20-3}{12}} = 2^{1-\frac{17}{12}}$$

$$= 2^{-\frac{5}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2^5}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt[12]{32}}}$$

3° نقارن: $a=\sqrt[3]{7}$ و $b=\sqrt[2]{5}$

لدينا 6 مضاعف مشترك لـ 3 و 2،

$a = \sqrt[3]{7} = \sqrt[2\times3]{7^2} = \sqrt[6]{49}$

و $b = \sqrt[2]{5} = \sqrt[2\times3]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

بما أن: $125 > 49$ فإن: $\boxed{b > a}$

4° نحسب الدالة الأصلية H بحيث: $H(-1)=\frac{3}{2}$

الدوال الأصلية لـ h تكتب:

$$H: x \mapsto \frac{8}{16}x^{16} - \frac{5}{10}x^{10} + \frac{2}{4}x^4 - x + k$$

اذن: $H(x) = \frac{x^{16}}{2} - \frac{x^{10}}{2} + \frac{x^4}{2} - x + k$

لدينا: $H(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-1) + k = \frac{3}{2}$

اذن: $\frac{1}{2} + 1 + k = \frac{3}{2}$ اذن $\frac{3}{2}+k=\frac{3}{2}$

ومنه $k=0$ وبالتالي: $\boxed{H(x) = \frac{x^{16}}{2} - \frac{x^{10}}{2} + \frac{x^4}{2} - x}$

التمرين الثاني

$f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2+1}$

1° لدينا: $x^2+1>0$ لكل x من IR.

اذن: $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R}),\ f(-x) = (-x)^2 - 2\sqrt{(-x)^2+1}$
$= x^2 - 2\sqrt{x^2+1} = f(x)$

اذن $\boxed{f \text{ دالة زوجية}}$

حساب: $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$:

مباشرة نجد "$\infty - \infty$" (F.I)

ولدينا: $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty}\left(x^2 - 2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

اذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(x - 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

$= "+\infty\times(+\infty-2)" = \boxed{+\infty}$

(لأن: $|x| = x$)

في حالة: $x\to-\infty$ فإن: $x<0$ اذن $|x|=-x$

وبالتالي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2 + 2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

$= \lim_{x\to-\infty} x\left(x+2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = "-\infty\times(-\infty)"$

$= \boxed{+\infty}$

وبتالي

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

/2° ليكن x من D_f ، لدينا :

$$(\sqrt{x^2+1}-1)^2 - 2$$
$$= \sqrt{x^2+1}^2 - 2\sqrt{x^2+1} + 1 - 2$$
$$= x^2+1 - 2\sqrt{x^2+1} - 1$$
$$= x^2 - 2\sqrt{x^2+1} = f(x)$$

اذن :

$$(\forall x \in D_f)\quad f(x) = (\sqrt{x^2+1}-1)^2 - 2$$

/3° لتكن g قصور f على $I = [0,+\infty[$

اذن :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\quad g(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2+1}$$

(أ - 3°) بما أن :

$(\forall x \in I)$; $x^2+1 > 0$

فإن : g ق.ش على I و لكل x من I :

$$g'(x) = (x^2 - 2\sqrt{x^2+1})'$$
$$= 2x - 2\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$
$$= 2x - \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = 2x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

اذن :

$$g'(x) = 2x \times \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

/ب - 3° لدينا : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(\sqrt{x^2+1}-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x = 0$ أو $\sqrt{x^2+1} - 1 = 0)$

$\Leftrightarrow (x=0$ أو $x^2 = 0) \Leftrightarrow x = 0$

ومنه جدول تغيرات g :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	-2 $\nearrow$ $+\infty$

ملاحظة : لدينا : $(\forall x \in I)$, $x^2+1 \geq 1$

اذن : $(\forall x \in I)$; $\sqrt{x^2+1} - 1 \geq 0$

وبالتالي اشارة $g'(x)$ هي نفس اشارة x .

/4° $x \mapsto x^2+1$ متصلة وموجبة على I

اذن $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ متصلة على I

ومنه g متصلة على I كفرق دالتين متصلتين.

وبما أن g تزايدية قطعا على I فإنها

تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال

$$J = g(I) = [g(0) ; \lim_{+\infty} g[$$

$$J = [-2 ; +\infty[$$

/5° يكفي أن نبين أن $g'(g^{-1}(1-2\sqrt{2})) \neq 0$

بما أن : $g(1) = 1 - 2\sqrt{2}$

فإن : $1 = g^{-1}(1-2\sqrt{2})$

اذن : $g'(g^{-1}(1-2\sqrt{2})) = g'(1)$

ونعلم أن : $g'(x) = \dfrac{2x(\sqrt{x^2+1}-1)}{\sqrt{x^2+1}}$

اذن : $g'(1) = \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} \neq 0$

اذن g^{-1} ق.ش في $1-2\sqrt{2}$

/6° نعلم أن :

$$(g^{-1})'(x_0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x_0))}$$

اذن :

$$(g^{-1})'(1-2\sqrt{2}) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1-2\sqrt{2}))}$$
$$= \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}^2-1^2)}$$
$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اذن :

$$(g^{-1})'(1-2\sqrt{2}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3

/7 نعلم أن : $f(0) = -2$ اذن -2 هو قيمة للدالة f.

نبين أنها دنيا : نعلم أن لكل x من D_f :

$$f(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)^2 - 2$$

اذن :

$$f(x) - (-2) = \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)^2 \geqslant 0$$

اذن :

$$(\forall x \in D_f) : \quad f(x) \geqslant -2$$

ومنه $f(0) = -2$ هي قيمة دنيا لـ f على D_f

/8 الفروع اللانهائية لـ : $(\mathcal{C}_f)$:

نعلم أن :

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ولدينا :

$$\frac{f(x)}{x} = x - 2\frac{|x|}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

اذن :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 2\frac{x}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

(في هذه الحالة $|x| = x$ لأن $x > 0$)

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x - 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$$

بنفس الطريقة نجد :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

— * fin * —



ثانوية الليمون

فرض محروس رقم 2 [نموذج 2]
دورة I / 2020 - 2021 / ساعة ونصف

تمرين 1 :

① أحسب النهايتين :

$$\lim_{x \to 2} \frac{2 - \sqrt[3]{4x}}{3x - 6}$$

و : $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}{x}$$

② قارن العددين : $\sqrt[3]{3}$ و $\sqrt[5]{2}$ (بدون آلة حاسبة)

③ نعتبر الدالة h بحيث : $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

3-أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة h في 1 على اليمين ثم -1 على اليسار.

3-ب) اعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها.

تمرين 2 :

f دالة عددية بحيث :

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 2x}$$

1°/ حدد D_f ثم احسب النهايات عند محداته.

2°/ أدرس قابلية اشتقاق f في 2 على اليمين وأعط تأويلا هندسيا.

3°/ أحسب $f'(x)$ وأدرس إشارتها.

4°/ بين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا ثم حدد وضع $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لمقاربه المائل.

5°/ لتكن g قصور f على المجال $I = [2; +\infty[$

5°-أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة

ذاى مجال J : مع تحديد J .

5 - ب) أنشئ في نفس المعلم كلا من منحنى f و g^{-1} .

6°/ أحسب : $g\left(\frac{9}{4}\right)$.

7°/ بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في $\frac{5}{2}$ ، ثم

أحسب : $(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$

—** fin **—

ملاحظة : 3°/ نجد : $f'(x) = 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

f' سالبة على المجال : $]2;+\infty[$

f' موجبة على المجال : $]-\infty;0[$

7°/ نجد : $(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

1

غ

ثانوية الليمون : تصحيح النموذج 2 للفرض الثاني.

موسم : 2020-2021 - الدورة الاولى.

تمرين 1 : ① حساب النهاية :

$$\lim_{x \to 2} \frac{2-\sqrt[3]{4x}}{3x-6}$$

مباشرة نجد : "$\frac{0}{0}$" وهو ش.غ.م) ولدينا :

$$\frac{2-\sqrt[3]{4x}}{3x-6} = \frac{2^3 - \sqrt[3]{4x}^3}{(3x-6)(2^2 + 2\sqrt[3]{4x} + \sqrt[3]{4x}^2)}$$

$$= \frac{4(2-x)}{3(x-2)(4+2\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{4x}^2)}$$

$$= \frac{-4(x-2)}{3(x-2)(4+2\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{4x}^2)}$$

$$= \frac{-4}{3(4+2\sqrt[3]{4x}+(\sqrt[3]{4x})^2)}$$

اذن :

$$\lim_{x \to 2} \frac{2-\sqrt[3]{4x}}{3x-6} = \lim_{x \to 2} \frac{-4}{3(4+2\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{4x}^2)}$$

$$= \frac{-4}{3(4+2\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}^2)} = \frac{-4}{3\times(4\times3)} = \boxed{\frac{-1}{9}}$$

حساب : $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x}$ مباشرة نجد : "$\frac{+\infty}{-\infty}$" ش.غ.م.

ونكتب ما يلي : بما أن $x \to -\infty$ فإن : $x < 0$

اذن : $-x > 0$ ومنه : $-x = \sqrt[3]{(-x)^3}$

اذن :

$$x = -(-x) = -\sqrt[3]{(-x)^3} = -\sqrt[3]{-x^3}$$

و :

$$\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{-\sqrt[3]{-x^3}} = -\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{-x^3}}$$

$$= -\sqrt[3]{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$$

وبما أن : $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}=0$ فإن :

إذا : $\lim_{x\to-\infty} -\sqrt[3]{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=0$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x}=\boxed{0}$

ملاحظة : ينبغي الانتباه إلى اشارة الأساس عند التعامل مع الجذر من الرتبة n. مثلا : الكتابة : $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ نستعملها بعد التأكد من أن $x\geqslant 0$.

لذا ينبغي اجتناب الكتابة : $\sqrt[5]{(-3)^2}=(-3)^{\frac{2}{5}}$

اذا كان $a\geqslant 0$ فإن : $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

اذا كان $a\leqslant 0$ فإن : $\sqrt[n]{a^{2m}}=(-a)^{\frac{2m}{n}}$

اذا كانت اشارة a مجهولة نستعمل القيمة المطلقة.

② نقارن $\sqrt[3]{3}$ و $\sqrt[5]{2}$: 15 مضاعف لـ 3 و 5 .

ولدينا : $\sqrt[3]{3}=\sqrt[15]{3^5}=\sqrt[15]{243}$ و $\sqrt[5]{2}=\sqrt[15]{2^3}=\sqrt[15]{8}$

بما أن : $8<243$ فإن : $\boxed{\sqrt[5]{2}<\sqrt[3]{3}}$

③ $h(x)=\sqrt{x^2-1}$ ؛ $h(1)=0$

3 - أ) قابلية الاشتقاق في 1 على اليمين : ليكن $1<x$

لدينا : $\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{(x-1)^2}}=\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}}$

3

$$\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

إذن: $\lim\limits_{x \to 1^{>}} \frac{x+1}{x-1} = "\frac{2}{0^+}" = +\infty$

$$\lim_{x \to 1^{>}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \boxed{+\infty}$$

ومنه: **h لا تقبل الاشتقاق في 1 على اليمين.**

قابلية الاشتقاق في -1 على اليسار: لدينا: $h(-1) = 0$

ولكل $x < -1$ لدينا:

$$\frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2-1} \times \sqrt{x^2-1}}{(x+1) \times \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{(x^2-1)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

إذن:

$$\lim_{x \to -1^{<}} \frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to -1^{<}} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= "\frac{-1-1}{\sqrt{0}}" = "\frac{-2}{0^+}" = \boxed{-\infty}$$

وبالتالي h لا تقبل الاشتقاق في -1 على اليسار.

3 ـ ب) تأويل هندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس موجه نحو الأعلى في النقطة $A(1;0)$

ونصف مماس موجه نحو الأعلى في النقطة $B(-1;0)$.

4

تمرين 2 :

$$f(x) = x+1-\sqrt{x^2-2x}$$

/1° ليكن x من $\mathbb{R}$:

$$x \in D_f \iff x^2-2x \geq 0$$
$$\iff x(x-2) \geq 0$$

x		0		2	
$x(x-2)$	+	0	−	0	+

اذن :

$$D_f =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$$

النهايات عند المحدات :

المحدات : هي : $-\infty$ ؛ 2^+ ؛ 0^- و $+\infty$

نكتفي بحساب النهاية عند المحدات المفتوحة : $+\infty$ و $-\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2-2x = +\infty$ (نهاية الحد الذي له أكبر درجة)

اذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{x^2-2x} = -\infty$ ومنه :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x+1)-\sqrt{x^2-2x} = \boxed{-\infty}$$

مباشر نجد : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = "\infty - \infty"$ وهو ش.غ.م

ولدينا :

$$x+1-\sqrt{x^2-2x} = \frac{(x+1-\sqrt{x^2-2x})(x+1+\sqrt{x^2-2x})}{(x+1+\sqrt{x^2-2x})}$$

$$= \frac{(x+1)^2-x^2+2x}{x+1+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{4x+1}{x+1+\sqrt{x^2-2x}}$$

(5)

$$\frac{\cancel{x}\left(4+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}$$

اذن :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$$=\frac{4+0}{1+0+\sqrt{1}}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

/2° قابلية الاشتقاق في 2 على اليمين : لدينا : $f(2)=3$

و :

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x+1-\sqrt{x^2-2x}-3}{x-2}$$

$$=\frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}}{x-2}=1-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}$$

$$=1-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{(x-2)^2}}$$

x على يمين 2 اذن :
$x-2>0$
ومنه : $x-2=\sqrt{(x-2)^2}$

$$=1-\sqrt{\frac{x(x-2)}{(x-2)^2}}$$

$$=1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

بما أن : $\lim_{x\to 2^{>}}\frac{2}{x-2}=\text{"}\frac{2}{0^+}\text{"}=\boxed{+\infty}$ فإن :

$$\lim_{x\to 2^{>}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^{>}}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)=\text{"}1-(+\infty)\text{"}=\boxed{-\infty}$$

6

إذن: f لا تقبل الاشتقاق في 2 على اليمين.

تأويل هندسي: (C_f) يقبل نصف مماس موجه نحو الأسفل ↓ في النقطة: $M(2;3)$

3°/ الدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها ما عدا النقط التي تنعدم فيها: إذن: $]-\infty,0[\cup]2;+\infty[$ هي مجموعة تعريف f'، ولدينا:

$$\forall x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[,\quad f'(x)=\left(x+1-\sqrt{x^2-2x}\right)'$$

$$=1-\frac{(x^2-2x)'}{2\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=1-\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=1-\frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x}}$$

إذن: $$f'(x)=1-\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

لدينا: $f'(x)=1+\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x}}$ إذا كان: $x<0$ فإن: $x-1<-1$

إذن: $x-1<0$ ومنه: $1-x>0$ إذن: $\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x}}>0$ وبالتالي:

$f'(x)>0$ لكل $x<0$.

ليكن $x>2$: أحد العبارتين $f'(x)\geqslant 0$ أو $f'(x)<0$ صحيحة

لدينا:

$$f'(x)<0\iff 1+\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x}}<0$$

$$\iff 1<\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\iff\sqrt{x^2-2x}<x-1$$

7

$$\Leftrightarrow x^2-2x < x^2-2x+1 \Leftrightarrow 0<1$$

وبما أن العبارة $(0<1)$ صحيحة فإن العبارة : $f'(x)<0$ صحيحة

خلاصة :

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ ▨ $-$

/4° نعلم أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ولدينا :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+1-\sqrt{x^2-2x}}{x} = 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

$$= 1+\frac{1}{x}-\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

$|x|=-x$ لأن : $x\to-\infty$. إذن $\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}$

ومنه :

$$\frac{f(x)}{x} = 1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

وبالتالي :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1+0+\sqrt{1} = \boxed{2}$$

لدينا :

$$f(x)-2x = x+1-\sqrt{x^2-2x}-2x$$

$$= (1-x)-\sqrt{x^2-2x}$$

$$= \frac{(1-x)^2-\sqrt{x^2-2x}^{\,2}}{(1-x)+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \frac{1-2x+x^2-x^2+2x}{1-x+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{1}{1-x+\sqrt{x^2-2x}}$$

8

لدينا: $\lim_{x \to -\infty} x^2 - 2x = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} 1 - x = +\infty$

اذن: $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - 2x) = "\frac{1}{+\infty}" = 0$

وبالتالي المستقيم الذي معادلته: $(\Delta): y = 2x$
مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

الوضع النسبي لـ: $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ) : نحدد اشارة $f(x) - y$:

$$f(x) - y = x + 1 - \sqrt{x^2 - 2x} - 2x$$
$$= 1 - x - \sqrt{x^2 - 2x}$$

نلاحظ أن هذا التعبير لا ينعدم، لأن:

$$f(x) - y = 0 \iff 0 = 1 - x - \sqrt{x^2 - 2x}$$
$$\iff \sqrt{x^2 - 2x} = 1 - x$$
$$\iff x^2 - 2x = 1 - 2x + x^2 \iff 0 = 1$$

وهذا مستحيل اذا: إمّا $f(x) - y > 0$
وإما: $f(x) - y < 0$

نعوض مثلا بـ: $x = 0$ فنجد: $f(0) - y = 1 > 0$

اذن: $f(x) - y > 0$ وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يوجد فوق (Δ) (بجوار $-\infty$)

Scanné avec CamScanner

9

/5°: g قصور f على المجال $I=[2,+\infty[$

يعني أن: $\forall x\in I=[2,+\infty[\ ,\ g(x)=x+1-\sqrt{x^2-2x}$

أ- 5°) الدالة $x\longmapsto x^2-2x$ متصلة وموجبة على I.

اذن: $x\longmapsto\sqrt{x^2-2x}$ متصلة على I.

ومنه: g متصلة على I (لأنها فرق دالتين متصلتين)

رتابة g هي رتابة f.

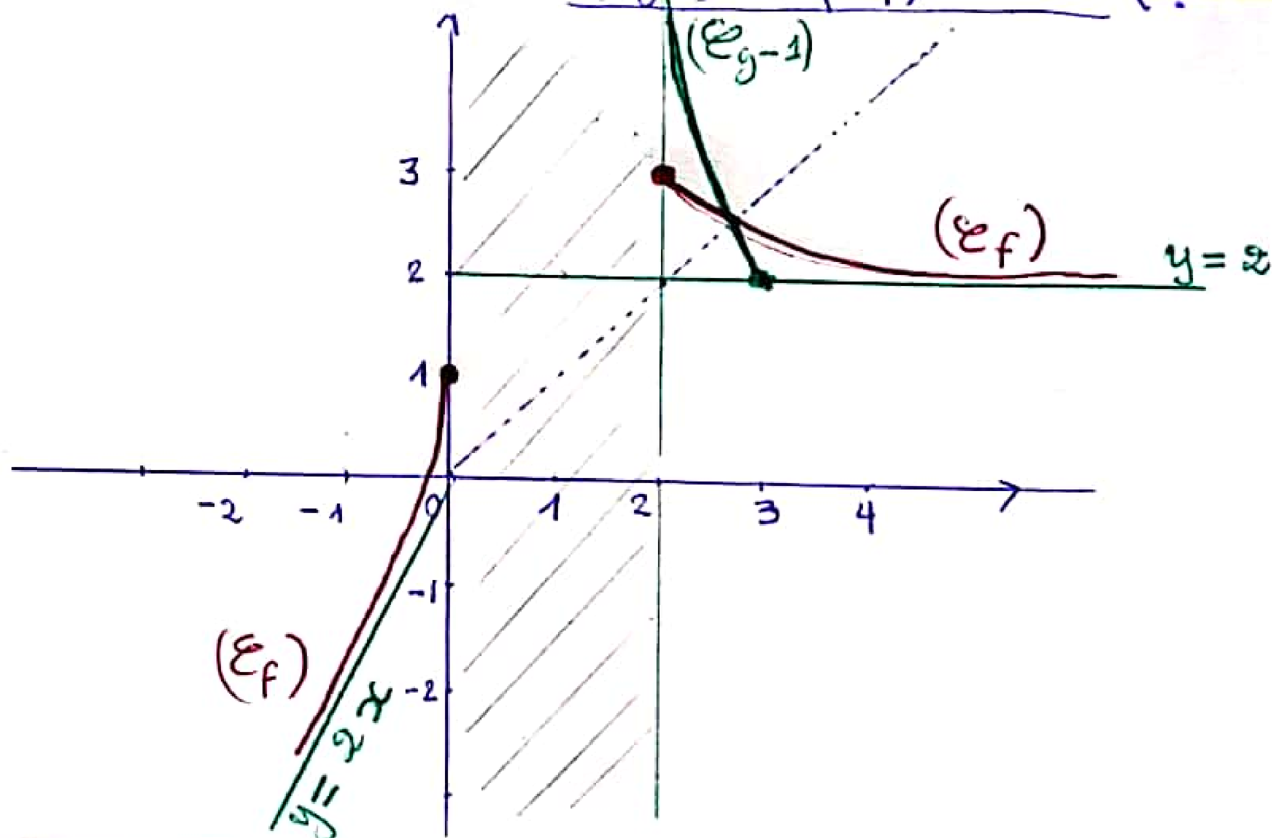
f تناقصية قطعا على I (لأن $f'(x)<0$) اذن g تناقصية قطعا على I.

نستنتج أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على $J=g(I)$

ولدينا:

$$J=g([2,+\infty[)=]\lim_{+\infty}g\ ;\ g(2)]$$
$$=]2;3]$$

5- ب) انشاء $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$:



10

◄ لإنشاء $(\mathcal{C}_f)$: اعتمدنا على $f(0)=1$ و $f(2)=3$

ثم المقارب الأفقي: نعلم أن: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

إذن المستقيم: $(D): y = 2$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

ونعلم أن: $(\Delta): y = 2x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

وأن $(\mathcal{C}_f)$ يوجد فوق (Δ).

◄ إنشاء $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$: نرسم أولا المنصف الأول للمعلم: $y=x$

ثم نرسم مماثل $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لهذا المستقيم.

6/ حساب: $g\left(\frac{9}{4}\right)$:

$$g(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$g\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} + 1 - \sqrt{\frac{81}{16} - 2\times\frac{9}{4}} = \frac{13}{4} - \sqrt{\frac{81-72}{16}}$$

$$= \frac{13}{4} - \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{13}{4} - \frac{3}{4} = \frac{10}{4}$$

إذن: $\boxed{g\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{5}{2}}$

ملاحظة: الهدف من هذا السؤال هو حساب $g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$

خاصية: $\boxed{f(a) = b \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)}$

لدينا: $g\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{5}{2}$ إذن: $\boxed{\frac{9}{4} = g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)}$

11

/70 قابلية الاشتقاق في $\frac{5}{2}$.

نطبق الخاصية :

$$(g^{-1})'(x_0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x_0))}$$

والتي تكون ممكنة عندما يكون $g'(g^{-1}(x_0)) \neq 0$

لدينا :

$$(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{g'\left(\frac{9}{4}\right)}$$ (لأن : $\frac{9}{4} = g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$)

ولدينا :

$$g'(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$g'\left(\frac{9}{4}\right) = 1 + \frac{1-\frac{9}{4}}{\sqrt{\frac{81}{16}-\frac{18}{4}}} = 1 + \frac{-5}{4} \times \frac{4}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

بما أن : $g'\left(\frac{9}{4}\right) \neq 0$ فإن g^{-1} ق.ش في $\frac{5}{2}$.

ونجد :

$$(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(\frac{9}{4}\right)} = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

-+* fin *+-

ثانوية الليمون — واجب محروس رقم 2 من الدورة الأولى موسم : 2020 - 2021

مستوى : ثانية باك علوم — $2PC_2$ [2k+1] — (A)

تمرين 1 (4ن)

2ن — 1° أحسب : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+5} - 3x$ و $\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x-8}$

1ن — 2° بسط التعبير :

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{64}} \times \sqrt[3]{8}}{2\sqrt[3]{125} - 6\sqrt[5]{32}}$$

1ن — 3° لتكن H دالة أصلية الدالة : $h : x \mapsto 12x^5 - 3x^2 + 4x - 5$

حدد H علما أن : $H(1) = \frac{1}{2}$.

تمرين 2 (16ن)

نعتبر الدالة f بحيث : $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

1ن — 1° - أ) تحقق أن : $D_f =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$

1ن — 1° - ب) أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ،

1ن — 2° - أ) أدرس قابلية اشتقاق f في 3 على اليمين ثم أعط تأويلا هندسيا.

1ن — 2° - ب) أدرس قابلية اشتقاق f في 0 على اليسار ثم أعط تأويلا هندسيا.

1ن — 3° - أ) بين أن : $(\forall x \in D_f - \{0; 3\})$; $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$

2ن — 3° - ب) ضع جدول تغيرات f على D_f.

2ن — 4 - أ) اعط معادلة المقارب المائل لـ : $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(+\infty)$.

2ن — 4 - ب) اعط معادلة المقارب المائل لـ : $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

2ن — 5° / أرسم $(\mathcal{C}_f)$.

6° / لتكن g قصور الدالة f على المجال : $I = [3 ; +\infty[$.

1ن — 6° - أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J نحدده.

1ن — 6° - ب) أحسب $g(4)$ و $g'(4)$.

1ن — 6° - ج) بين أن : $(g^{-1})'(2) = \frac{4}{5}$

— انتهى —

2021-2020 ثانوية الليمون

تصحيح الواجب المحروس رقم 2 دورة I

فك 2 فوج [2k+1] (A)

تمرين 1 | **1°)** حساب: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+5}-3x$

مباشرة نجد "$\infty-\infty$" وهو (ش.غ.م)

ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+5}-3x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^3}}-3x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^3}}-3\right)$$

$$= \text{"}+\infty \times (\sqrt[3]{1+0}-3)\text{"}$$

$$= \text{"}+\infty\times(-2)\text{"} = \boxed{-\infty}$$

حساب: $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$. مباشرة نجد: "$\frac{0}{0}$" وهو (ش.غ.م) ولدينا:

$$\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \frac{\sqrt[3]{x}^3-2^3}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+2^2)}$$

$$= \frac{x-8}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

اذا:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{8}^2+2\sqrt[3]{8}+4} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

2°) نبسط:

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{64}}\times\sqrt[3]{8}}{2\sqrt[3]{125}-6\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[4]{64}\times 2}{2\times 5-6\times 2}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{8^2}\times 2}{-2} = -\sqrt[2]{8} = -\sqrt{8} = \boxed{-2\sqrt{2}}$$

3°) الدوال الأصلية للدالة،

$$h: x\mapsto 12x^5-3x^2+4x-5$$

تكتب على شكل:

$$H: x\mapsto \frac{12}{6}x^6-\frac{3}{3}x^3+\frac{4}{2}x^2-5x+k \quad (k\in\mathbb{R})$$

اذا:

$$H(x) = 2x^6-x^3+2x^2-5x+k$$

(حيث: $k\in\mathbb{R}$)

1 اذا كان: $H(1)=\frac{1}{2}$

فإن:

$$\frac{1}{2} = 2-1+2-5+k$$

$$\frac{1}{2} = -2+k$$

اذا: $k=\frac{5}{2}$ ومنه:

$$\boxed{H(x) = 2x^6-x^3+2x^2-5x+\frac{5}{2}}$$

تمرين 2

$$f(x)=\sqrt{x^2-3x}$$

1°- أ) ليكن x من $\mathbb{R}$:

$$x\in D_f \iff x(x-3)\geq 0$$

x		0		3	
$x(x-3)$	+	0	−	0	+

$$\boxed{D_f =]-\infty;0]\cup[3;+\infty[}$$

1°- ب) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x} = \boxed{+\infty}$$

و

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x} = \boxed{+\infty}$$

لأن:

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^2-3x = \lim_{|x|\to+\infty} x^2 = +\infty$$

2°- أ) قابلية الاشتقاق في 3 على اليمين:

لدينا: $f(3)=0$ و:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-3x}}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^+}\frac{x(x-3)}{(x-3)\sqrt{x^2-3x}}$$

$$= \lim_{x\to 3^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-3x}} = \text{"}\frac{3}{0^+}\text{"} = \boxed{+\infty}$$

اذا f غير قابلة للاشتقاق في 3 على اليمين

تأويل هندسي، يقبل $(\mathcal{C}_f)$ نصف مماس في النقطة ذات الأفصول 3 ، يوازي محور الاراتيب وموجه نحو الأعلى.

(2ب- ق.ش في 0 على اليسار:

لدينا: $f(0)=0$ و

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x-3)}{x\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-3x}}$$

$$= \text{"}\frac{-3}{0^+}\text{"} = \boxed{-\infty}$$

اذن: f لا تقبل الاشتقاق في 0 على اليسار

تأويل هندسي: (C_f) يقبل نصف مماس موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول 0. (النقطة O)

(3°-أ لكل x من $D_f - \{0;3\}$

لدينا: $x^2-3x > 0$

اذن f ق.ش على $D_f - \{0;3\}$

و:

$$f'(x) = \frac{(x^2-3x)'}{2\sqrt{x^2-3x}} = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$$

(3-ب تغيرات f على D_f:

اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة البسط $2x-3$

اذن:

x	$-\infty$	0	$3/2$	3	$+\infty$
$2x-3$	$-$		0		$+$
$f'(x)$	$-$	‖	//////	‖	$+$

ومنه جدول تغيرات f هو:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$(-\infty)$ ‖	//////	‖ $(+\infty)$	$+$
f	$+\infty$ ↘	0	//////	0	↗ $+\infty$

(4-أ معادلة المقارب المائل بجوار $+\infty$:

نعلم أن: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2 نحسب: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{3}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1-\frac{3}{x}} \quad \left(\text{لأن: } |x|=x \text{ ، } x \to +\infty\right)$$

$$= \boxed{1} = a \quad \left(\text{لأن: } \lim_{x \to +\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)=1\right)$$

نحسب: $\lim_{x \to +\infty}(f(x)-x)$ مباشرة

نجد: "$\infty-\infty$" (F.I) ولدينا:

$$\lim_{x \to +\infty}(f(x)-x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1} = \frac{-3}{2} = b$$

اذن: $y = x - \frac{3}{2}$ هي معادلة المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

(4-ب معادلة المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

و:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x}\sqrt{1-\frac{3}{x}} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1-\frac{3}{x}}$$

$$= \boxed{-1} = a \quad (\text{لأن } |x|=-x)$$

ولدينا:

$$\lim_{x \to -\infty}(f(x)-(-x)) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-3x}+x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2(1-3/x^2)}-x}$$

ب - 6) حساب $g(4)$:

$$g(4) = \sqrt{4^2 - 3\times 4} = \sqrt{4} = \boxed{2}$$

حساب $g'(4)$:

لدينا : $$g'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$$

اذن : $$g'(4) = \frac{8-3}{2\times\sqrt{4}} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

ج - 6) نعلم أن : $g(4) = 2$ اذن : $4 = g^{-1}(2)$

نطبق الخاصية :

$$(g^{-1})'(x_0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x_0))}$$

نجد :

$$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(2))}$$

$$= \frac{1}{g'(4)} = \frac{1}{\frac{5}{4}}$$

اذن : $$\boxed{(g^{-1})'(2) = \frac{4}{5}}$$

ملاحظة : يمكن أيضا تطبيق الخاصية :

$$(g^{-1})'(g(x_0)) = \frac{1}{g'(x_0)}$$

فنكتب :

$$(g^{-1})'(2) = (g^{-1})'(g(4))$$

$$= \frac{1}{g'(4)} = \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

— ... —

تذكير : معادلة المقارب المائل تكتب على شكل :

$(\Delta) : y = ax + b$

لتحديد a نحسب : $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

لتحديد b نحسب : $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}} - x}$$

بما أن : $x \to -\infty$ فإن : $x < 0$ اذن :

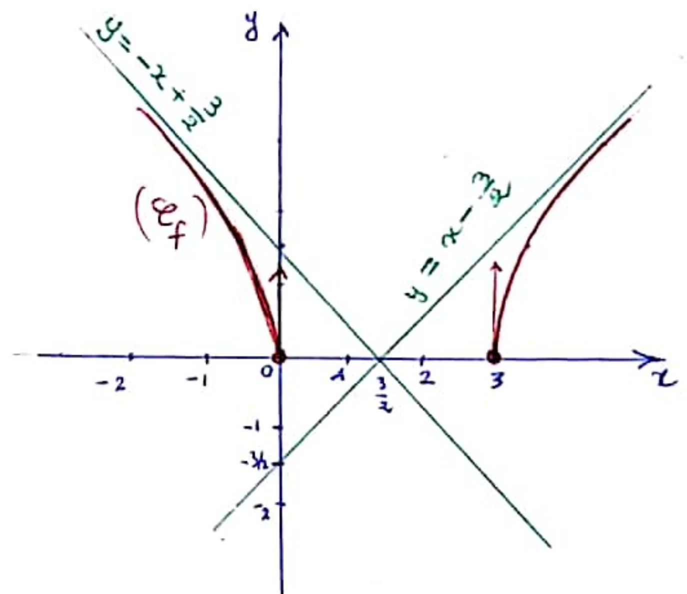
$|x| = -x$ ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1-\frac{3}{x}} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{-\sqrt{1-\frac{3}{x}} - 1} = \frac{-3}{-1-1} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

اذن : $y = -x + \frac{3}{2}$ هي المعادلة المطلوبة

5/ انشاء $(\mathcal{C}_f)$.



6/ g قصور f على $I = [3, +\infty[$

يعني أن : $\forall x \in [3, +\infty[;\ g(x) = \sqrt{x^2-3x}$

(خاصيات g هي نفسها خاصيات f)

أ - 6) الاتصال : الدالة $x \mapsto x^2 - 3x$

متصلة وموجبة على I اذن :

$g : x \mapsto \sqrt{x^2-3x}$ متصلة على I .

الرتابة : $g = f$. تزايدية قطعا

على I .

اذا : g تقبل دالة عكسية g^{-1}

معرفة على $J = g(I)$ نحو I .

ثانوية الليمون — واجب محروس رقم 2 من الدورة الاولى — موسم: 2020-2021

مستوى: ثانية باك علوم — 2PC₂ [2k+1] — B

تمرين 1 (04ن)

2ن — 1° أحسب: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+4}-5x$ و $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt[3]{3x}-3}{x-9}$

1ن — 2° بسط التعبير: $B = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{16}\times\sqrt{4}}}{\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}}$

1ن — 3° لتكن G دالة أصلية للدالة: $g : x \mapsto 7x^6-8x^3+3x-1$

حدد G علما أن: $G(1)=\frac{3}{4}$

تمرين 2 (16ن)

نعتبر الدالة f بحيث: $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$

1ن — 1° - أ) تحقق أن: $D_f =]-\infty;0]\cup[4;+\infty[$.

1ن — 1° - ب) أحسب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

1ن — 2° - أ) أدرس قابلية اشتقاق f في 4 على اليمين ثم أعط تأويلا هندسيا.

1ن — 2° - ب) أدرس قابلية اشتقاق f في 0 على اليسار ثم أعط تأويلا هندسيا.

1ن — 3° - أ) بين أن: $(\forall x\in D_f-\{0;4\});\ f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$

2ن — 3° - ب) ضع جدول تغيرات f على D_f .

2ن — 4° - أ) اعط معادلة المقارب المائل لـ: $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(+\infty)$.

2ن — 4° - ب) اعط معادلة المقارب المائل لـ: $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

2ن — 5° / أرسم $(\mathcal{C}_f)$.

6° / لتكن g قصور f على المجال: $I=[4;+\infty[$.

1ن — 6° - أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J نحو: I.

1ن — 6° - ب) أحسب: $g(5)$ و $g'(5)$.

1ن — 6° - ج) بين أن: $(g^{-1})'(\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}}{3}$

— انتهى —

ثانوية اليمون — تصحيح الواجب رقم 2 دورة I (د)
(B) $\left(\begin{matrix}2020\\2021\end{matrix}\right)$ ذكر 2 أفوج: [2k+1]

تمرين 1: 1°) حساب النهايات

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+4} - 5x$

مباشرة نجد "$\infty - \infty$" وهو (ش.غ.م).

ولدينا: $x \to +\infty$ اذا: $x>0$ و:

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}} - 5x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}} - 5\right)$

$= "+\infty \times (1-4)" = \boxed{-\infty}$

اذا: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+4} - 5x = \boxed{-\infty}$

حساب: $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt[3]{3x} - 3}{x-9}$:

مباشرة نجد: "$\frac{0}{0}$" (ش.غ.م)

$\frac{\sqrt[3]{3x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt[3]{3x}^3 - 3^3}{(x-9)\left(\sqrt[3]{3x}^2 + 3\sqrt[3]{3x} + 3^2\right)}$

$= \frac{3x - 27}{(x-9)\left(\sqrt[3]{3x}^2 + 3\sqrt[3]{3x} + 9\right)}$

$= \frac{3(x-9)}{(x-9)\left(\sqrt[3]{3x}^2 + 3\sqrt[3]{3x} + 9\right)}$

$= \frac{3}{\sqrt[3]{3x}^2 + 3\sqrt[3]{3x} + 9}$

اذا: $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt[3]{3x}-3}{x-9} = \frac{3}{9+9+9} = \boxed{\frac{1}{9}}$

2°) نبسط B:

$B = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{16}} \times \sqrt{4}}{\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[2]{\sqrt[3]{16}} \times 2}{\sqrt[3]{4^3} + \sqrt[3]{9\times 3}}$

$= \frac{\sqrt[6]{2^4} \times 2}{4 + \sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} \times 2}{7} = \boxed{\frac{2}{7}\sqrt[3]{4}}$

3°) G دالة أصلية للدالة:

$g: x \mapsto 7x^6 - 8x^3 + 3x - 1$

اذا: $G(x) = \frac{7}{7}x^7 - \frac{8}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + k$

حيث $(k\in\mathbb{R})$. نجد:

$G(x) = x^7 - 2x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + k$

بما أن: $G(1) = \frac{3}{4}$ فإن:

$1 - 2 + \frac{3}{2} - 1 + k = \frac{3}{4}$

$\frac{-4+3}{2} + k = \frac{3}{4}$

اذا: $k = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ نجد: $k = \frac{5}{4}$

وبالتالي:

$\boxed{G(x) = x^7 - 2x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{5}{4}}$

تمرين 2: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

1° - أ) لبكن $x\in\mathbb{R}$:

$x \in D_f \Leftrightarrow x(x-4) \geq 0$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

اذا: $\boxed{D_f =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[}$

1° - ب) لدينا: $\lim_{x\to-\infty} x^2 - 4x = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

اذا: $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-4x} = +\infty$

ومنه: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

بالمثل نجد: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

2° - أ) ق.ش f في 4 على اليمين:

لدينا: $f(4) = 0$ و:

$\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x-4} = \frac{x^2-4x}{(x-4)\sqrt{x^2-4x}}$

$= \frac{x(x-4)}{(x-4)\sqrt{x^2-4x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}$

اذا: $\lim_{\substack{x\to 4\\ >}} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{\substack{x\to 4\\ >}} \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}} = \frac{4}{0^+} = \boxed{+\infty}$

اذا f غير ق.ش في 4 على اليمين.

تأويل هندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى ↑ في النقطة ذات الأفصول 4.

2-ب) ندرس f في 0 على اليسار :

لدينا : $f(0)=0$ و :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x} = \frac{x(x-4)}{x\sqrt{x^2-4x}}$$

اذا :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x}} = \frac{-4}{0^+} = \boxed{-\infty}$$

> f لا تقبل الاشتقاق في 0 على اليسار

> تأويل هندسي : $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى ↑ في النقطة : $O(0,0)$

3-أ) اذا كان $x \in D_f-\{0;4\}$

فإن : $x^2-4x>0$ اذا :

f ق ش على $D_f-\{0;4\}$ و :

$$f'(x) = \frac{(x^2-4x)'}{2\sqrt{x^2-4x}} = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}}$$

$$= \frac{2(x-2)}{2\sqrt{x^2-4x}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$$

3-ب) $f'(x)$ و $(x-2)$ لهما نفس الاشارة :

جدول إشارة f' :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$x-2$	$-$		0	$+$	
$f'(x)$	$-$	‖	//////	‖	$+$

اذن جدول تغيرات f هو :

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$(-\infty)$ ‖	//////	‖ $(+\infty)$	$+$
f	$+\infty$ ↘	0	//////	0	↗ $+\infty$

4-أ) المقارب المائل لـ : $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(+\infty)$:

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{4}{x}}$$

بما أن $x\to+\infty$ فإن $x>0$ اذا : $|x|=x$

ومنه $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ اذا :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{4}{x}} = \boxed{1} = a$$

نحسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$: لدينا :

$$f(x)-ax = f(x)-x = \sqrt{x^2-4x} - x$$

$$= \frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}+x}$$

$$= \frac{-4x}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}}+x} = \frac{-4x}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1\right)}$$

اذا :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1} = \frac{-4}{2} = -2 = b$$

> اذا : $y = x-2$ هي معادلة المقارب المائل لـ : $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

4-ب) معادلة المقارب المائل بجوار $-\infty$.

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{4}{x}}$$

لأن : $x\to-\infty$: $|x| = -x$

اذا :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{4}{x}} = -1 = a$$

نحسب : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)$

لدينا :

$$f(x)-ax = \sqrt{x^2-4x} + x$$

$$= \frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x} - x}$$

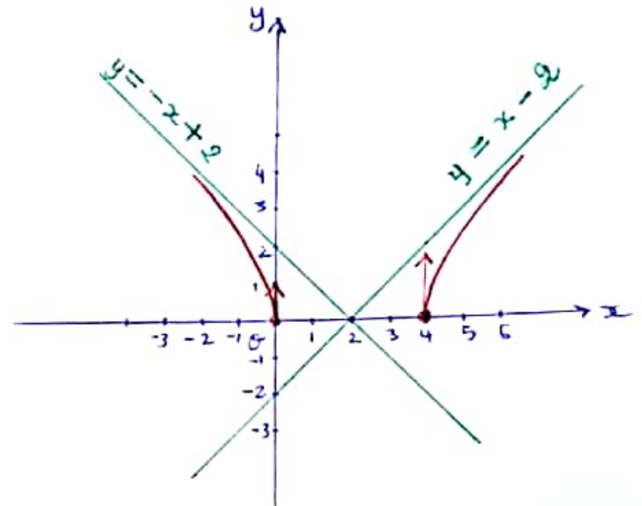
$$= \frac{-4}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}} - 1}$$

اذا :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax) = \frac{-4}{-2} = 2 = b$$

معادلة المقارب المائل بجوار $-\infty$ هي: $y = -x + 2$

5°/ انشاء $(\mathscr{C}_f)$:



6°/ g قصور f على $I = [4, +\infty[$

يعني أن: $\forall x \in [4, +\infty[\quad g(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

6° - أ) $x \mapsto x^2 - 4x$ متصلة وموجبة على I

اذن g متصلة على I.

g تزايدية قطعا على المجال $[4, +\infty[$

اذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال $J = g(I)$ نحو I.

6° - ب) حساب $g(5)$:

$$g(5) = \sqrt{25 - 20} = \boxed{\sqrt{5}}$$

حساب $g'(5)$:

$$g'(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}}$$

اذن:

$$g'(5) = \frac{5 - 2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{5}}}$$

6° - ج) لدينا:

$\boxed{x_0 = \sqrt{5}}$

$$(g^{-1})'(\sqrt{5}) = (g^{-1})'(x_0)$$

$$= \frac{1}{g'(g^{-1}(x_0))}$$

$$= \frac{1}{g'(g^{-1}(\sqrt{5}))}$$

بما أن: $g(5) = \sqrt{5}$ فإن: $5 = g^{-1}(\sqrt{5})$

ومنه: $g'(g^{-1}(\sqrt{5})) = g'(5)$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}$$

اذن:

$$\boxed{(g^{-1})'(5) = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

ثانوية الليمون
ثانية باك علوم

- واجب محروس رقم 2 - الدورة الأولى
- قسم : $PC_2[2k]$

2020/2021

A

تمرين 1 (3pts)

1° قارن العددين : $\sqrt[4]{5}$ و $\sqrt[8]{23}$ — 1ن

2° بسط التعبير : $A = \dfrac{\left(\sqrt{\sqrt{a}}\sqrt[3]{a^2}\right)^5 \times \sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^{24}}}$ (حيث $a>0$) — 1ن

3° نعتبر الدالة : $g : x \longmapsto 6x^8 - 6x^5 + 6$ و G دالتها الأصلية التي تحقق $G(1) = \dfrac{2}{3}$. — 1ن

أوجد تعبير الدالة G .

تمرين 2 (17pts)

f دالة عددية معرفة بصيغتها : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1/ تحقق أن: $D_f =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ ثم أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ — 2ن

2 - أ) ادرس ق.ش f في 1 على اليمين ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة . — 1ن

2 - ب) أدرس ق.ش f في -1 على اليسار ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة . — 1ن

3 - أ) بين أن : $(\forall x \in D_f - \{-1;1\});\quad f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ — 1ن

3 - ب) برهن أن $(\forall x < -1);\quad f'(x) < 0$ — 1ن

3 - ج) استنتج تغيرات f على مجموعة تعريفها . — 1ن

4 - أ) أكتب معادلة المقارب الأفقي لـ : $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$. — 2ن

4 - ب) حدد الفرع اللانهائي لـ : $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(+\infty)$. — 2ن

5/ أرسم $(\mathcal{C}_f)$. — 2ن

6/ لتكن g قصور الدالة f على المجال : $I = [1,+\infty[$

6 - أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J . — 1ن

6 - ب) أحسب : $g'(\sqrt{2})$ ، — 1ن

6 - ج) بين أن g^{-1} ق.ش في : $g(\sqrt{2})$ ثم أحسب : $(g^{-1})'(g(\sqrt{2}))$. — 2ن

ثانوية الليمون / تصحيح الواجب رقم 2 دورة 1
قسم : 2 فد [2k : ح نوج]



تمرين 1:

1°) نقارن: $\sqrt[4]{5}$ و $\sqrt[8]{23}$

لدينا: $\sqrt[4]{5} = \sqrt[2\times 4]{5^2} = \sqrt[8]{25}$

بما أن: $23 < 25$ فإن: $\sqrt[8]{23} < \sqrt[8]{25}$

إذا: $\boxed{\sqrt[8]{23} < \sqrt[4]{5}}$

2°) نبسط A: (حيث $a>0$)

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^{24}}} = \frac{\sqrt[4]{a}\,\sqrt[3]{a^{10}}\,\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^{24}}}$$

$$= a^{\frac14+\frac{10}{3}+\frac14-\frac{24}{3}} = a^{\frac24+\frac{10}{3}-8}$$

$$= a^{\frac{46}{12}-8} = a^{\frac{23}{6}-8} = a^{-\frac{25}{6}} = \frac{1}{a^{\frac{25}{6}}}$$

بما أن: $25 = 6\times 4 + 1$

فإن: $a^{\frac{25}{6}} = a^{4+\frac16} = a^4\sqrt[6]{a}$

إذا: $\boxed{A = \frac{1}{a^4\sqrt[6]{a}}}$

3°) لتكن G دالة أصلية للدالة g بحيث:

$$g(x) = 6x^8 - 6x^5 + 6$$

إذا: $G(x) = \frac{6}{9}x^9 - \frac{6}{6}x^6 + 6x + k$

حيث $(k\in\mathbb{R})$

أو: $G(x) = \frac{2}{3}x^9 - x^6 + 6x + k$

بما أن: $G(1) = \frac{2}{3}$

فإن: $\frac{2}{3} - 1 + 6 + k = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow -1+6+k=0 \Leftrightarrow 5+k=0$

إذا: $k=-5$ و:

$$\boxed{G(x) = \frac{2}{3}x^9 - x^6 + 6x - 5}$$

تمرين 2:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$$

1°/ $D_f = \{x\in\mathbb{R} \,;\, x^2-1 \geq 0\}$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x=1$ أو $x=-1)$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذا: $\boxed{D_f =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[}$

حساب: $\lim_{+\infty} f$: بما أن:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-1 = +\infty$$

فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \boxed{+\infty}$

حساب $\lim_{-\infty} f$: مباشرة نجد: "$-\infty+\infty$"

ولدينا:

$$x+\sqrt{x^2-1} = \frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

بما أن: $\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = "-\infty-\infty" = -\infty$

فإن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = "\frac{1}{-\infty}" = \boxed{0}$

2-أ) ق.ش f في 1 على اليمين:

لدينا: $f(1)=1$ و:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1}$$

$$= 1 + \sqrt{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}} \quad (\text{لأن: } x-1>0)$$

$$= 1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

بما أن: $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1} = "\frac{2}{0^+}" = +\infty$ فإن:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \boxed{+\infty}$$

إذا:

f غير ق.ش في 1 على اليمين.

تأويل هندسي: (C_f) يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول 1

2

2 - ب) ق.ش f في -1 على اليسار:

لدينا: $f(-1) = -1$ و

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}-(-1)}{x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x+1} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 1 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$$

بما أن:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \text{"}\frac{-2}{0^+}\text{"} = -\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \text{"}1+(-\infty)\text{"} = -\infty$$

إذن: f غير ق.ش في -1 على اليسار.

تأويل هندسي: (C_f) يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول -1.

3 - أ) إذا كان $x \in D_f - \{-1;1\}$ فإن $x^2-1>0$

وبالتالي f ق.ش على $D_f - \{-1;1\}$

ولدينا:

$$f'(x) = \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)' = 1 + \frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \boxed{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}$$

3 - ب) نبرهن أن: $(\forall x<-1);\ f'(x)<0$

نستعمل البرهان بالتكافؤ: ليكن $x<-1$

لدينا:

$$f'(x)<0 \iff 1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0$$

$$\iff 1 < \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}} \iff \sqrt{x^2-1} < -x$$

$$\iff \sqrt{x^2-1}^{\,2} < (-x)^2 \quad \text{(لأن الطرفين موجبين)}$$

$$\iff x^2-1 < x^2 \iff -1<0$$

وهذا صحيح (العبارة $-1<0$ صحيحة)

إذن العبارة: $f'(x)<0$ صحيحة لكل x من المجال $]-\infty;-1[$

(ملاحظة: $x<-1 \Rightarrow -x>0$)

3 - ج) مما سبق لدينا: $\forall x<-1\ f'(x)<0$

وبما أن: f' موجبة على $]1,+\infty[$ فإن تغيرات f نلخصها في الجدول:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$(-\infty)$ ‖	//////	‖ $(+\infty)$	$+$	
f	0	↘	-1 ‖	//////	‖ 1	↗	$+\infty$

4 - أ) نعلم أن: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (سؤال 1)

إذا: $y=0$ هي معادلة المقارب الأفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

4 - ب) نعلم أن: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ولدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = 1+\sqrt{1} = \boxed{2}$$

(لأن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$)

ولدينا:

$$f(x)-2x = x+\sqrt{x^2-1}-2x$$

$$= \sqrt{x^2-1}-x = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

إذن:

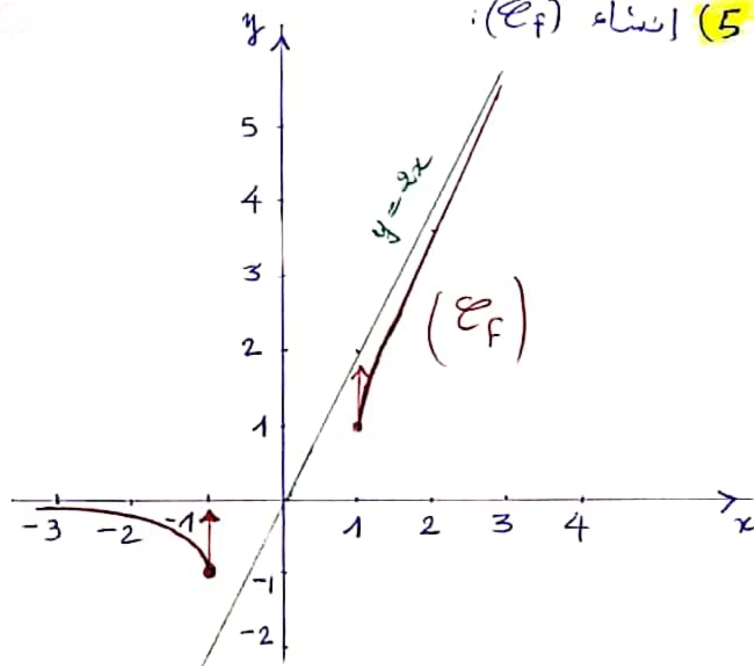
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x)-2x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= \text{"}\frac{-1}{+\infty}\text{"} = \boxed{0}$$

نستنتج أن (C_f) يقبل فرعا لانهائيا بجوار $+\infty$ معادلة مقاربه المائل هي:

$$\boxed{y = 2x}$$

5) إنشاء $(\mathcal{C}_f)$:



6) g قصور f على $I=[4;+\infty[$ يعني أن:

$(\forall x\in[4;+\infty[);\ g(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

6-أ) الدالة: $x\mapsto x^2-1$ متصلة وموجبة على المجال I.

اذن: $x\mapsto\sqrt{x^2-1}$ متصلة على I.

ومنه: $g: x\mapsto x+\sqrt{x^2-1}$ متصلة على المجال I (لأنها مجموع دالتين متصلتين على I)

وبما أن g تزايدية قطعا على I فإنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال: $J=g(I)$.

6-ب) لدينا: $g'(x)=f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

اذن: $g'(\sqrt{2})=1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-1}}=\boxed{1+\sqrt{2}}$

6-ج) نطبق الخاصية:

$$(g^{-1})'(g(\sqrt{2}))=\frac{1}{g'(\sqrt{2})}$$

نعلم أن: $g'(\sqrt{2})=1+\sqrt{2}\neq0$ اذن g^{-1} ق.ش في $g(\sqrt{2})$ ولدينا:

$$(g^{-1})'(g(\sqrt{2}))=\frac{1}{g'(\sqrt{2})}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}-1}$$

ثانوية الليمون ◂ واجب محروس رقم 2 - الدورة الأولى 2020 2021 (B)
ثانية باك علوم ◂ قسم : $PC_2[2k]$

تمرين 1 (3pts)

ن1 1°) قارن العددين : $\sqrt[3]{3}$ و $\sqrt[9]{26}$.

ن1 2°) ليكن : $b>0$ ؛ بسط التعبير : $B=\dfrac{(\sqrt[5]{b})^2\times\sqrt{\sqrt{b}}}{\sqrt[20]{b^3}}$

ن1 3°) نعتبر الدالة : $h : x \mapsto 7x^6-8x^5+4x-1$ و H دالتها الأصلية التي تحقق : $H(1)=-\frac{4}{3}$. أوجد تعبير الدالة H .

تمرين 2 (17pts)

f دالة عددية معرفة بصيغتها : $f(x)=x+2\sqrt{x^2-1}$.

ن2 1/ تحقق أن : $D_f=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ن1 2 - أ) أدرس قاش f في 1 على اليمين ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

ن1 2 - ب) أدرس قاش f في -1 على اليسار ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

ن1 3 - أ) بين أن : $(\forall x\in D_f-\{-1;1\});\ f'(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

ن1 3 - ب) برهن أن : $(\forall x<-1);\ f'(x)<0$.

ن1 3 - ج) ضع جدول تغيرات f على D_f .

ن2 4 - أ) تحقق أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا لانهائيا مقاربه المستقيم الذي معادلته : $y=3x$ بجوار $(+\infty)$.

ن2 4 - ب) حدد الفرع اللانهائي لـ : $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

ن2 5/ أرسم $(\mathcal{C}_f)$.

6/ لتكن g قصور الدالة f على المجال : $I=[1;+\infty[$.

ن1 6 - أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J .

ن1 6 - ب) أحسب $g'(\sqrt{2})$.

ن2 6 - ج) بين أن g^{-1} ق.ش في $g(\sqrt{2})$ ثم أحسب : $(g^{-1})'(g(\sqrt{2}))$.

ثانوية الليمون / تصحيح الواجب المحروس رقم 2

2020 / 2021 (B)

2 فك [2k : فوج]

تمرين 1:

1° نقارن $\sqrt[9]{26}$ و $\sqrt[3]{3}$

لدينا: $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3\times3]{3^3} = \sqrt[9]{27}$

بما أن: $26 < 27$ فإن: $\sqrt[9]{26} < \sqrt[9]{27}$

اذن: $\boxed{\sqrt[9]{26} < \sqrt[3]{3}}$

2° (ليكن: $b>0$) نبسط:

$$B = \frac{(\sqrt[5]{b})^2 \times \sqrt{\sqrt{b}}}{\sqrt[20]{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{b^2}\ \sqrt[4]{b^1}}{\sqrt[20]{b^3}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}\ b^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{20}}}$$

$$= \frac{b^{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{20}}} = b^{\frac{8+5}{20}-\frac{3}{20}} = b^{\frac{10}{20}} = b^{\frac{1}{2}}$$

إذن: $\boxed{B = \sqrt{b}}$

3° H دالة أصلية للدالة:

$h : x \mapsto 7x^6 - 8x^5 + 4x - 1$

اذن: $H(x) = \frac{7}{7}x^7 - \frac{8}{6}x^6 + \frac{4}{2}x^2 - x + k$

(حيث: $k \in \mathbb{R}$) ومنه:

$H(x) = x^7 - \frac{4}{3}x^6 + 2x^2 - x + k$

بما أن: $H(1) = -\frac{4}{3}$ فإن:

$1 - \frac{4}{3} + 2 - 1 + k = -\frac{4}{3}$

أي $2 + k = 0$ نجد: $k = -2$

ومنه: $H(x) = x^7 - \frac{4}{3}x^6 + 2x^2 - x - 2$

تمرين 2:

$f(x) = x + 2\sqrt{x^2-1}$

1/ $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 1 \geq 0\}$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

اذن: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x = 1$ أو $x = -1)$

جدول الاشارة:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+	

وبالتالي: $\boxed{D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[}$

حساب $\lim_{+\infty} f$: مباشرة نجد:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 2\sqrt{x^2-1} = +\infty$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty$)

حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: مباشرة نجد: "$\infty - \infty$" وهو (ش.ع.ت)

ولدينا:

$$f(x) = x + 2|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$= x - 2x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = x\left(1 - 2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

بما أن: $\lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$

فإن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - 2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

$= "-\infty \times (1-2)" = "-\infty \times (-1)" = \boxed{+\infty}$

2-أ) ق.ش f في 1 على اليمين:

لدينا: $f(1) = 1$ ولكل $x > 1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x + 2\sqrt{x^2-1} - 1}{x-1}$$

$$= \frac{x-1}{x-1} + 2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = 1 + \frac{2(x^2-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= 1 + \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}$$

اذن: $\lim_{x\to1^{>}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^{>}} 1 + \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}$

$= "1 + \frac{4}{0^+}" = \boxed{+\infty}$

اذن: f غير ق.ش في 1 على اليمين.

تأويل هندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول 1.

2-ب) ق.ش f في -1 على اليسار:

لدينا: $f(-1) = -1$ ولكل $x < -1$:

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{x + 2\sqrt{x^2-1} + 1}{x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x+1} + 2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 1 + \frac{2(x^2-1)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= 1 + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}$$

اذن: $\lim_{x\to-1^{<}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to-1^{<}} 1 + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}$

$= "1 + \frac{-4}{0^+}" = \boxed{-\infty}$

إذن f لا تقبل الاشتقاق في $1-$ على اليسار.

تأويل هندسي: (C_f) يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول $1-$.

3-أ) لكل x من $D_f-\{-1;1\}$ لدينا: $x^2-1>0$ إذن f ق.ش على $D_f-\{-1;1\}$ ولدينا:

$$f'(x)=\left(x+2\sqrt{x^2-1}\right)' = 1+2\times\frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}} = 1+\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$$

3-ب) نبرهن أن: $(\forall x<-1);\ f'(x)<0$

نستعمل البرهان بالتكافؤ: لكل $x<-1$ لدينا:

$$f'(x)<0 \iff 1+\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}<0$$
$$\iff 1<\frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\iff \sqrt{x^2-1}<-2x \iff x^2-1<(-2x)^2$$
$$\iff x^2-1<4x^2 \iff -1<3x^2$$

بما أن العبارة $(-1<3x^2)$ صحيحة فإن: العبارة $f'(x)<0$ صحيحة.

(ملاحظة: بما أن $x<-1$ فإن x سالب إذن: $-2x$ موجب.)

3-ج) حسب السؤال 3-ب) f' سالبة على المجال $]-\infty;-1[$ ومن خلال تعبيرها $f'(x)$ نلاحظ أنها موجبة على المجال $]1,+\infty[$ إذن:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$(-\infty)$ ‖	//////	‖ $+\infty$	$+$	
f	$+\infty$	↘	-1	//////	1	↗	$+\infty$

4-أ) نعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(3x))$ لدينا:

$$f(x)-3x = 2\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$
$$=2\,\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 2\,\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \text{"}\frac{-2}{+\infty}\text{"} = \boxed{0}$

إذن (C_f) يقبل فرعا لانهائيا مقاربه المستقيم الذي معادلته: $y=3x$ بجوار $(+\infty)$.

4-ب) نعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

نحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$. لدينا:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x+2\sqrt{x^2-1}}{x} = 1+2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$
$$=1+2\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

($x\to-\infty$ إذن $x<0$ ومنه: $|x|=-x$)

وبالتالي: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1-2\times\sqrt{1} = \boxed{-1}$

نحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x)]$

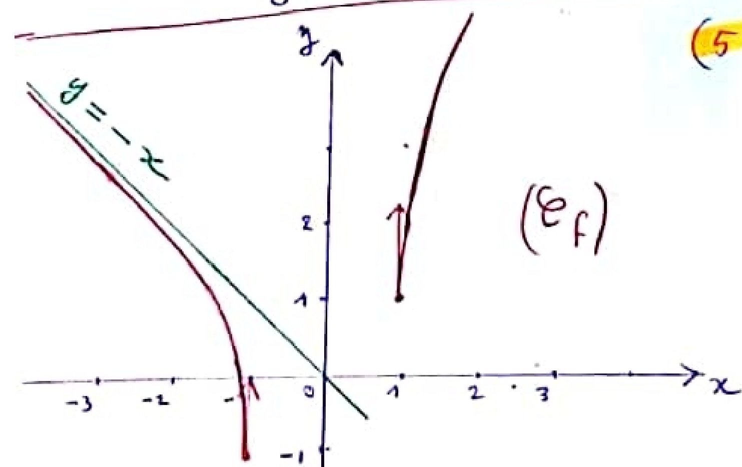
لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2\sqrt{x^2-1}+x\right)$
$$=\lim\limits_{x\to-\infty} 2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

ولدينا:
$$x+\sqrt{x^2-1} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

إذا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-x)) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \text{"}\frac{1}{-\infty}\text{"} = \boxed{0}$

وبالتالي (C_f) يقبل فرعا لانهائيا بجوار $(-\infty)$ مقاربه المائل هو المستقيم ذو المعادلة: $y=-x$

5)



③

6) g قصور f على المجال $I=[1,+\infty[$

يعني أن: $(\forall x \in [1,+\infty[)\ g(x)=x+2\sqrt{x^2-1}$

6-أ) الدالة: $x \mapsto x^2-1$ متصلة وموجبة على I إذن: $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ متصلة على I.

وبالتالي g دالة متصلة على I (لأنها مجموع دالتين متصلتين)

وبما أن g تزايدية قطعا على I فإنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال: $J=g(I)$،

6-ب) نعلم أن: $g'(x) = 1+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

إذن: $g'(\sqrt{2}) = 1+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-1}} = \boxed{1+2\sqrt{2}}$

6-ج) نطبق الخاصية: $(g^{-1})'(g(\sqrt{2})) = \dfrac{1}{g'(\sqrt{2})}$

لدينا: g' ق.ش في $\sqrt{2}$،

و $g'(\sqrt{2}) \neq 0$

إذن: g^{-1} ق.ش في $g(\sqrt{2})$

و: $(g^{-1})'(g(\sqrt{2})) = \dfrac{1}{g'(\sqrt{2})} = \boxed{\dfrac{1}{1+2\sqrt{2}}}$

* * *

ملاحظة: $\dfrac{1}{1+2\sqrt{2}} = \dfrac{1-2\sqrt{2}}{1-8} = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{7}$

ثانوية الليمون مستوى : ثانية باك علوم	واجب محروس رقم: 2 / دورة: 1 2PC3 [2k+1]	2020 2021 A 

التمرين الأول (4)

1ن 1° أحسب النهايتين : $\lim_{x \to +\infty} 7x - \sqrt[3]{x^3+5x}$

1ن و $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{x-3}$

1ن 2° قارن العددين : $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[5]{5}$

1ن 3° بسط التعبير: $A = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{\sqrt{9}}}{\sqrt[3]{81} \times \sqrt{2}}$

التمرين الثاني (16) لتكن f دالة معرفة كمايلي : $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$

2ن 1° / تحقق أن $D_f =]-\infty ; \frac{1}{2}]$ ثم أحسب : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2ن 2° / أدرس قابلية اشتقاق f في $\frac{1}{2}$ على اليسار ، ثم أعط تأويلا هندسيا .

1ن 3° / تحقق أن : $(\forall x \in]-\infty ; \frac{1}{2}[) ; \quad f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$

2ن 4° / ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f ثم حدد مطارف الدالة f .

1ن 5° / اعط معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصول 0 .

2ن 6° / حدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

2ن 7° / أرسم $(\mathscr{C}_f)$.

1ن 8° / أثبت أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو D_f

1ن 9° / حدد المجال J .

1ن 10° / أحسب $f(0)$ ثم أستنتج أن f^{-1} ق.ش في 1 .

1ن 11° / تحقق أن : $(f^{-1})'(1) = -\frac{3}{2}$

— * انتهى * —

تذكير : $(\sqrt[3]{u})' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$

$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$

معادلة المماس في x_0 :

$(T) : \; y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

(1)

$$A = 2^{\frac{4-3}{6}} \times 3^{\frac{3-8}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{-5}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{3^5}} = \sqrt[6]{\frac{2}{3\times 81}} = \boxed{\sqrt[6]{\frac{2}{243}}}$$

تمرين 2:

$$f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$$

/1°

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \quad 1-2x \geqslant 0\}$$

$$1-2x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant 2x \iff \frac{1}{2} \geqslant x$$

اذن:

$$\boxed{D_f =]-\infty ; \frac{1}{2}]}$$

حساب: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$: لدينا:

$$\lim_{x\to -\infty} 1-2x = +\infty$$

اذن:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{1-2x} = \boxed{+\infty}$$

/2° قابلية اشتقاق f في $\frac{1}{2}$ على اليسار:

لدينا: $f(\frac{1}{2}) = \sqrt[3]{1-2(\frac{1}{2})} = \sqrt[3]{0} = 0$

ولكل $x < \frac{1}{2}$:

$$\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{1-2x}}{x-1/2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{1-2x} \times \sqrt[3]{(1-2x)^2}}{(x-\frac{1}{2})\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(1-2x)^3}}{(x-\frac{1}{2})\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \frac{1-2x}{(x-\frac{1}{2})\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

$$= \frac{-2(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

اذن:

$$\lim_{\substack{x\to \frac{1}{2} \\ <}} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{\substack{x\to \frac{1}{2} \\ <}} \frac{-2}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

$$= \frac{-2}{0^+} = \boxed{-\infty}$$

اذن f غير قابلة للاشتقاق في $\frac{1}{2}$ على اليسار

تأويل هندسي: $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول $\frac{1}{2}$

ثانوية الليمون: تصحيح الواجب المحروس رقم 2
الدورة 1 . فسدر: فكـ 3 [2k+1] (A)

تمرين 1: /1° حساب النهايات:

$$\lim_{x\to +\infty} 7x - \sqrt[3]{x^3+5x}$$

مباشرة نجد: "$\infty - \infty$+" وهو (ش.غ.م)،

ولدينا:

$$\lim_{x\to +\infty} 7x - \sqrt[3]{x^3+5x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} 7x - \sqrt[3]{x^3} \times \left(\sqrt[3]{1+\frac{5x}{x^3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x\left(7 - \sqrt[3]{1+\frac{5}{x^2}}\right)$$

$$= "+\infty \times (7-1)" = +\infty \times 6 = \boxed{+\infty}$$

$$\left(\text{لأن: } \lim_{x\to +\infty} 1+\frac{5}{x^2} = 1+0 = 1\right)$$

حساب النهاية:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{9x}-3}{x-3}$$

مباشرة نجد: "$\frac{0}{0}$" (ش.غ.م)

ولدينا:

$$\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{x-3} = \frac{\sqrt[3]{9x}^3 - 3^3}{(x-3)(\sqrt[3]{9x}^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 3^2)}$$

$$= \frac{9x-27}{(x-3)(\sqrt[3]{9x}^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9)}$$

$$= \frac{9(x-3)}{(x-3)(\sqrt[3]{9x}^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9)} = \frac{9}{\sqrt[3]{9x}^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9}$$

اذن:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{9x}-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{9}{\sqrt[3]{9x}^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9}$$

$$= \frac{9}{\sqrt[3]{27}^2 + 3\sqrt[3]{27} + 9} = \frac{9}{9+9+9} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

/2° نقارن $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[5]{5}$: لدينا:

$$\sqrt[5]{5} = \sqrt[3\times 5]{5^3} = \sqrt[15]{125}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[5\times 3]{2^5} = \sqrt[15]{32}$$

بما أن: $125 > 32$ فإن:

$$\boxed{\sqrt[5]{5} > \sqrt[3]{2}}$$

/3° نبسط A.

$$A = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt[3]{3^4} \times \sqrt{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{1/2} \times 3^{-4/3} \times 2^{-1/2}$$

$$= 2^{2/3 - 1/2}\ 3^{1/2 - 4/3}$$

/3° إذا كان $x < \frac{1}{2}$ فإن: $1-2x>0$

إذا f ق.ش على المجال $]-\infty;\frac{1}{2}[$ ولدينا:

$$(\forall x<\tfrac{1}{2}): \quad f'(x)=\frac{(1-2x)'}{3\sqrt[3]{(1-2x)^{3-1}}}$$

$$=\boxed{\frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}}$$

/4° بما أن: $f'(x)<0$ لكل $x<\frac{1}{2}$ فإن: f تناقصية قطعا على D_f:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $1/2$
$f'(x)$	$-$ $\qquad$ $(-\infty)$ ‖
f	$+\infty$ ↘ 0

نلاحظ أن العدد: $0=f(\frac{1}{2})$ هو مطراف للدالة f (قيمة دنوية لـ f على D_f).

لأن: $(\forall x\in D_f), \ f(x)\geq f(\frac{1}{2})$

/5° $(T): \ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

إذا كان: $x_0=0$ فإن: $f(0)=\sqrt[3]{1}=1$

ولدينا: $f'(x)=\frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ إذا: $f'(0)=\frac{-2}{3}$

وبالتالي:

$$\boxed{(T): \ y=-\frac{2}{3}x+1}$$

/6° نعلم أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ (السؤال 1°/)

ولدينا $x\to-\infty$ إذا: $x<0$ ومنه: $-x>0$

إذا: $-x=\sqrt[3]{-x^3}$

وبالتالي:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt[3]{1-2x}}{-(-x)}=\frac{\sqrt[3]{1-2x}}{-\sqrt[3]{-x^3}}=-\sqrt[3]{\frac{1-2x}{-x^3}}$$

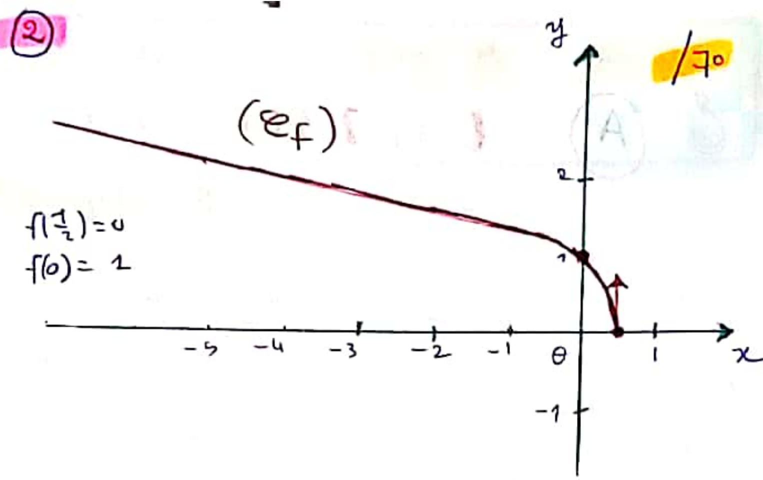
بما أن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x}{-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$

فإن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\sqrt[3]{0}=0$

وهذا يعني أن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$.

(2)

/7°



/8° $x\mapsto 1-2x$ متصلة وموجبة على D_f.

إذا f متصلة على D_f وبما أنها تناقصية قطعا فإنها تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $J=f(D_f)$

/9° $J=f(]-\infty;\frac{1}{2}])=[f(\frac{1}{2});\lim_{-\infty}f[$

$$\boxed{J=[0;+\infty[}$$

/10° $f(0)=\sqrt[3]{1}=1$

لكي تكون f^{-1} ق.ش في 1 ينبغي أن يكون للعبارة: $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$ معنى.

نعلم أن: $f(0)=1$ إذا: $0=f^{-1}(1)$

ومنه: $f'(f^{-1}(1))=f'(0)$

ولدينا: f ق.ش في 0 و $f'(0)=-\frac{2}{3}$

(حسب السؤال 5°) إذا:

بما أن: $f'(0)\neq0$ فإن f^{-1} ق.ش في 1.

/11° لدينا:

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

$$=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{(-\frac{2}{3})}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

— * * * —

 (B) 2020/2021

واجب محروس رقم: 2 / دورة: 1 — 2PC3 [2k+1]

ثانوية: الليمون — مستوى: ثانية باك علوم

التمرين الأول: (4)

1° / أحسب النهايتين: $\lim_{x\to+\infty} 5x-\sqrt[3]{x^3+x}$ و $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2}-2}{x-2}$ — 2ن

2° / قارن العددين: $\sqrt[3]{4}$ و $\sqrt[5]{5}$. — 1ن

3° / بسط التعبير: — 1ن

$$B=\frac{\sqrt{\sqrt{4}}\times\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{32}\times\sqrt{27}}$$

التمرين الثاني: (16)

نعتبر الدالة f بحيث: $f(x)=\sqrt[3]{1-4x}$

1° / تحقق أن: $D_f=]-\infty;\frac{1}{4}]$ ثم احسب: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. — 2ن

2° / أدرس قابلية اشتقاق f في $\frac{1}{4}$ على اليسار ثم أعط تأويلا هندسيا. — 2ن

3° / تحقق أن: $(\forall x\in]-\infty;\frac{1}{4}[)\ ;\ f'(x)=\frac{-4}{3\sqrt[3]{(1-4x)^2}}$ — 1ن

4° / ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f ثم حدد مطارفها. — 2ن

5° / اعط معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصول 0. — 1ن

6° / حدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$. — 2ن

7° / أرسم $(\mathcal{C}_f)$. — 2ن

8° / أثبت أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو D_f. — 1ن

9° / حدد المجال J. — 1ن

10° / أحسب $f(0)$ ثم استنتج أن f^{-1} ق.ش في 1. — 1ن

11° / تحقق أن: $(f^{-1})'(1)=-\frac{3}{4}$ — 1ن

— * انتهى * —

تذكير: $(\sqrt[3]{u})'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$.

معادلة المماس في x_0:

$(T):\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$(f^{-1})'(x_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$.